

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LCIV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 7 października 2025 r.

Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń

Numer rejestracyjny:

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

Wartości dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$:

x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)	x	F(x)
0,01	0,503989	0,41	0,659097	0,81	0,79103	1,21	0,886861	1,61	0,946301	2,01	0,977784	2,41	0,992024
0,02	0,507978	0,42	0,662757	0,82	0,793892	1,22	0,888768	1,62	0,947384	2,02	0,978308	2,42	0,99224
0,03	0,511966	0,43	0,666402	0,83	0,796731	1,23	0,890651	1,63	0,948449	2,03	0,978822	2,43	0,992451
0,04	0,515953	0,44	0,670031	0,84	0,799546	1,24	0,892512	1,64	0,949497	2,04	0,979325	2,44	0,992656
0,05	0,519939	0,45	0,673645	0,85	0,802337	1,25	0,89435	1,65	0,950529	2,05	0,979818	2,45	0,992857
0,06	0,523922	0,46	0,677242	0,86	0,805105	1,26	0,896165	1,66	0,951543	2,06	0,980301	2,46	0,993053
0,07	0,527903	0,47	0,680822	0,87	0,80785	1,27	0,897958	1,67	0,95254	2,07	0,980774	2,47	0,993244
0,08	0,531881	0,48	0,684386	0,88	0,81057	1,28	0,899727	1,68	0,953521	2,08	0,981237	2,48	0,993431
0,09	0,535856	0,49	0,687933	0,89	0,813267	1,29	0,901475	1,69	0,954486	2,09	0,981691	2,49	0,993613
0,1	0,539828	0,5	0,691462	0,9	0,81594	1,3	0,9032	1,7	0,955435	2,1	0,982136	2,5	0,99379
0,11	0,543795	0,51	0,694974	0,91	0,818589	1,31	0,904902	1,71	0,956367	2,11	0,982571	2,51	0,993963
0,12	0,547758	0,52	0,698468	0,92	0,821214	1,32	0,906582	1,72	0,957284	2,12	0,982997	2,52	0,994132
0,13	0,551717	0,53	0,701944	0,93	0,823814	1,33	0,908241	1,73	0,958185	2,13	0,983414	2,53	0,994297
0,14	0,55567	0,54	0,705401	0,94	0,826391	1,34	0,909877	1,74	0,95907	2,14	0,983823	2,54	0,994457
0,15	0,559618	0,55	0,70884	0,95	0,828944	1,35	0,911492	1,75	0,959941	2,15	0,984222	2,55	0,994614
0,16	0,563559	0,56	0,71226	0,96	0,831472	1,36	0,913085	1,76	0,960796	2,16	0,984614	2,56	0,994766
0,17	0,567495	0,57	0,715661	0,97	0,833977	1,37	0,914657	1,77	0,961636	2,17	0,984997	2,57	0,994915
0,18	0,571424	0,58	0,719043	0,98	0,836457	1,38	0,916207	1,78	0,962462	2,18	0,985371	2,58	0,99506
0,19	0,575345	0,59	0,722405	0,99	0,838913	1,39	0,917736	1,79	0,963273	2,19	0,985738	2,59	0,995201
0,2	0,57926	0,6	0,725747	1	0,841345	1,4	0,919243	1,8	0,96407	2,2	0,986097	2,6	0,995339
0,21	0,583166	0,61	0,729069	1,01	0,843752	1,41	0,92073	1,81	0,964852	2,21	0,986447	2,61	0,995473
0,22	0,587064	0,62	0,732371	1,02	0,846136	1,42	0,922196	1,82	0,96562	2,22	0,986791	2,62	0,995604
0,23	0,590954	0,63	0,735653	1,03	0,848495	1,43	0,923641	1,83	0,966375	2,23	0,987126	2,63	0,995731
0,24	0,594835	0,64	0,738914	1,04	0,85083	1,44	0,925066	1,84	0,967116	2,24	0,987455	2,64	0,995855
0,25	0,598706	0,65	0,742154	1,05	0,853141	1,45	0,926471	1,85	0,967843	2,25	0,987776	2,65	0,995975
0,26	0,602568	0,66	0,745373	1,06	0,855428	1,46	0,927855	1,86	0,968557	2,26	0,988089	2,66	0,996093
0,27	0,60642	0,67	0,748571	1,07	0,85769	1,47	0,929219	1,87	0,969258	2,27	0,988396	2,67	0,996207
0,28	0,610261	0,68	0,751748	1,08	0,859929	1,48	0,930563	1,88	0,969946	2,28	0,988696	2,68	0,996319
0,29	0,614092	0,69	0,754903	1,09	0,862143	1,49	0,931888	1,89	0,970621	2,29	0,988989	2,69	0,996427
0,3	0,617911	0,7	0,758036	1,1	0,864334	1,5	0,933193	1,9	0,971283	2,3	0,989276	2,7	0,996533
0,31	0,62172	0,71	0,761148	1,11	0,8665	1,51	0,934478	1,91	0,971933	2,31	0,989556	2,71	0,996636
0,32	0,625516	0,72	0,764238	1,12	0,868643	1,52	0,935745	1,92	0,972571	2,32	0,98983	2,72	0,996736
0,33	0,6293	0,73	0,767305	1,13	0,870762	1,53	0,936992	1,93	0,973197	2,33	0,990097	2,73	0,996833
0,34	0,633072	0,74	0,77035	1,14	0,872857	1,54	0,93822	1,94	0,97381	2,34	0,990358	2,74	0,996928
0,35	0,636831	0,75	0,773373	1,15	0,874928	1,55	0,939429	1,95	0,974412	2,35	0,990613	2,75	0,99702
0,36	0,640576	0,76	0,776373	1,16	0,876976	1,56	0,94062	1,96	0,975002	2,36	0,990863	2,76	0,99711
0,37	0,644309	0,77	0,77935	1,17	0,879	1,57	0,941792	1,97	0,975581	2,37	0,991106	2,77	0,997197
0,38	0,648027	0,78	0,782305	1,18	0,881	1,58	0,942947	1,98	0,976148	2,38	0,991344	2,78	0,997282
0,39	0,651732	0,79	0,785236	1,19	0,882977	1,59	0,944083	1,99	0,976705	2,39	0,991576	2,79	0,997365
0,4	0,655422	0,8	0,788145	1,2	0,88493	1,6	0,945201	2	0,97725	2,4	0,991802	2,8	0,997445

Zadanie 1.

W ramach modelu wewnętrznego w reżimie Wyłączalność II, aktuariusz analizuje wpływ wartości współczynników korelacji Pearsona pomiędzy stratami w liniach biznesowych na łączny wymóg wypłacalności. W swojej analizie rozważa metodę agregacji wariancji-kowariancji postaci:

$$SCR = \sqrt{\mathbf{x}^T * \Sigma * \mathbf{x}},$$

gdzie wektor \mathbf{x} zawiera wymogi kapitałowe dla poszczególnych linii biznesowych i $\Sigma = [\rho_{i,j}]$ jest macierzą korelacji pomiędzy liniami biznesowymi.

- Wyznacz pochodną $\frac{d SCR}{d \rho_{i,j}}$ i nadaj jej interpretację w kontekście rozważanej analizy (2p).
- W oparciu o wynik z p. a), wyjaśnij, w których liniach, ze względu na brzegowe wymogi kapitałowe, wpływ współczynnika korelacji jest największy na łączny wymóg kapitałowy (1p).
- Podaj wady i zalety zastosowanej metody analizy wpływu współczynników korelacji, biorąc pod uwagę, że ostateczne wyznaczenie wymogu kapitałowego w ramach modelu wewnętrznego dokonywane jest w wyniku wykonania 100 tys. symulacji z wielowymiarowego rozkładu strat w liniach biznesowych, o różnych rozkładach brzegowych i kopule Gaussa (2p).

Odpowiedzi:

- a) Możemy zapisać:

$$SCR = \sqrt{\sum_{i,j} x_i x_j \rho_{i,j}}.$$

W konsekwencji, możemy wyznaczyć dla $i \neq j$:

$$\frac{d SCR}{d \rho_{i,j}} = \frac{x_i x_j}{SCR}.$$

Wyrażenie $\frac{d SCR}{d \rho_{i,j}} \cdot h$ interpretujemy jako zmianę wymogu wypłacalności w wyniku zmiany współczynnika korelacji $\rho_{i,j}$ pomiędzy stratami w dwóch liniach biznesowych o h , gdzie zakładamy, że h jest małe.

- Zmiana współczynnika korelacji pomiędzy liniami biznesowymi będzie miała największy wpływ na wymóg wypłacalności dla linii o najwyższych wymogach kapitałowych.
- Wada: metoda agregacji wariancji-kowariancji daje poprawy wymóg wypłacalności na poziomie portfela w sytuacji, gdy straty w liniach biznesowych pochodzą z rozkładu eliptycznego (np. wielowymiarowy rozkład normalny).

Zaletą: metoda agregacji wariancji-kowariancji pozwala na wyznaczenie (przybliżonego) wymogu wypłacalności przy innej wartości współczynników korelacji bez wykonywania symulacji.

Przykładowa literatura: Rozdział 8.4 w *“Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools”*, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrecht, Princeton, 2015.

Zadanie 2.

W oparciu o Rozporządzenie Delegowane Wypłacalność II, odpowiedz:

- a) Jakie dwa warunki muszą spełniać stopy struktury terminowej podstawowej stopy procentowej wolnej od ryzyka (2p).
- b) Na podstawie jakich instrumentów finansowych ustalane są podstawowe stopy procentowe wolne od ryzyka (2p).
- c) Wyjaśnij pojęcie ostatecznej stopy forward (*Ultimate Forward Rate*) (1p).

Odpowiedzi:

Przykładowa literatura: Art. 44-47 w *ROZPORZĄDZENIE DELEGOWANE KOMISJI (UE) 2015/35 z dnia 10 października 2014 r. uzupełniające dyrektywę Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II)*

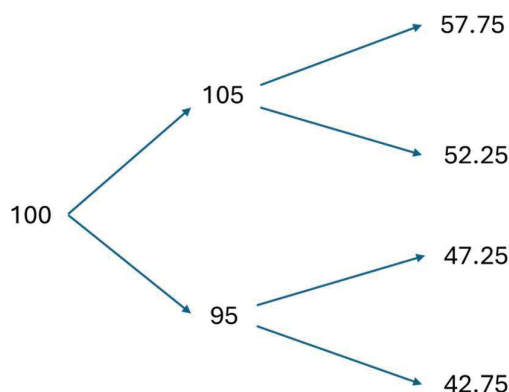
Zadanie 3.

Rozważamy dwuletnie ubezpieczenie z funduszem kapitałowym z gwarantowanymi okresowymi świadczeniami rentowymi. Bieżąca wartość rachunku wynosi 100 i ubezpieczony ma prawo do dwóch wypłat w wysokości 50 na koniec dwóch kolejnych okresów. Wartość rachunku w ubezpieczeniu zależy od stóp zwrotu z funduszu. W celu modelowania stóp zwrotu z funduszu stosujemy drzewo dwumianowe. Wartość funduszu może wzrosnąć o 5% lub spaść o 5% z prawdopodobieństwami historycznymi na poziomie 0.75 i 0.25. Stopa wolna od ryzyka wynosi 3% rocznie w całym okresie. Pomijamy ryzyko śmiertelności. Na rynku finansowym dostępne są rachunek bankowy wolny od ryzyka oraz fundusz. Nie ma ograniczeń w handlu na rynku finansowym.

- Opisz ryzyko finansowe w powyższym produkcie (1p).
- Jak można wyeliminować ryzyko finansowe w powyższym modelu, z punktu widzenia teoretycznego (1p).
- Wyznacz wartość gwarancji okresowych świadczeń rentowych zgodnie z zasadą braku arbitrażu (3p).

Odpowiedzi:

- Ryzyko finansowe w powyższym ubezpieczeniu związane jest ze spadkiem wartości rachunku ubezpieczeniowego, w wyniku zmiany wartości funduszu, co może prowadzić do niewypłacenia świadczeń rentowych w gwarantowanej wysokości i strat po stronie ubezpieczyciela.
- W powyższym modelu ryzyko finansowe możemy zabezpieczyć konstruując portfel replikujący straty ubezpieczyciela.
- Wyznaczamy wartość rachunku ubezpieczeniowego przed wypłatą świadczenia rentowego w momentach $t = 1, 2$ w możliwych scenariuszach zmiany wartości funduszu:



Wartości rachunku w momencie $t = 2$ zostały wyznaczone przy założeniu, że w momencie $t = 1$ wypłacamy gwarantowane świadczenie rentowe w wysokości

50. Gwarancji jest *in-the-money* tylko w momencie $t = 2$ w scenariuszu spadku wartości funduszu w pierwszym okresie.

Wyznaczamy prawdopodobieństwo wolne od ryzyka $q = 0.8$, rozwiązując równanie:

$$\frac{1 + 5\%}{1 + 3\%}q + \frac{1 - 5\%}{1 + 3\%}(1 - q) = 1$$

Wartość gwarancji świadczeń rentowych jest równa:

$$\frac{2.75}{(1 + 3\%)^2}0.2 \cdot 0.8 + \frac{7.25}{(1 + 3\%)^2}0.2^2 = 0.27.$$

Posiadając środki w wysokości 0.27 ubezpieczyciel może utworzyć portfel replikujący, który pokryje straty w wysokości 2.75 i 7.25 pojawiające się w scenariuszu spadku wartości funduszu w pierwszym okresie oraz, odpowiednio, spadku i wzrostu wartości funduszu w drugim okresie.

Przykładowa literatura: Rozdziały 8 i 18.2 w “*Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management*” - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.

Zadanie 4.

Rozważamy ryzyko składki i ryzyko rezerw w reżimie Wyptalcność II w segmencie ubezpieczenia odpowiedzialności cywilnej z tytułu użytkowania pojazdów mechanicznych (segment 1) oraz w segmencie ubezpieczenia od ognia i innych szkód rzeczowych (segment 4). Miary wielkości ryzyka składki wynoszą, odpowiednio, 30 i 40, odchylenia standardowe ryzyka składki wynoszą 10% i 8%, miary wielkości ryzyka rezerw wynoszą 20 i 30, odchylenia standardowe ryzyka rezerw wynoszą 9% i 10%, współczynnik korelacji pomiędzy ryzykiem składki i ryzykiem rezerw wynosi 0.5, współczynnik korelacji pomiędzy segmentami wynosi 0.25.

- a) Stosujemy agregację hierarchiczną zgodnie z Formułą Standardową. Na pierwszym poziomie agregujemy ryzyko składki z ryzykiem rezerw dla każdego segmentu oddzielnie, na kolejnym poziomie agregujemy łączne ryzyko składki i rezerw pomiędzy dwoma segmentami. Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka składki i ryzyka rezerw dla obu segmentów łącznie (zdywersyfikowany kapitał) zgodnie z Formułą Standardową (2p).
- b) Wykorzystując ogólną definicję alokacji Eulera, wyprowadź wzór i przeprowadź alokację zdywersyfikowanego kapitału do poziomu ryzyka składki w segmencie 1 (3p).

Odpowiedzi:

- a) Wymóg kapitałowy dla segmentu I:

$$SCR_1 = 3 * \sqrt{(30 \cdot 0.1)^2 + (20 \cdot 0.09)^2 + 2 \cdot 30 \cdot 0.1 \cdot 20 \cdot 0.09 \cdot 0.5} = 12.60.$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu II:

$$SCR_2 = 3 * \sqrt{(40 \cdot 0.08)^2 + (30 \cdot 0.1)^2 + 2 \cdot 40 \cdot 0.08 \cdot 30 \cdot 0.1 \cdot 0.5} = 16.11.$$

Wymóg kapitałowy dla segmentu I i II:

$$SCR = \sqrt{(12.60)^2 + (16.11)^2 + 2 \cdot 12.6 \cdot 16.11 \cdot 0.25} = 22.79.$$

- b) Niech h oznacza dodatkową ekspozycję dla ryzyka składki w segmencie I. Wyznaczmy miary ryzyka zgodnie z agregacją hierarchiczną:

$$SCR(h) = \sqrt{(SCR_1(h))^2 + (SCR_2)^2 + 2 * SCR_1(h) \cdot SCR_2 \cdot rho_{1,2}},$$

$$SCR_1(h) = \sqrt{(SCR_{1,s}(h))^2 + (SCR_{1,r})^2 + 2 \cdot SCR_{1,s}(h) \cdot SCR_{1,r} \cdot rho_{r,s}},$$

$$SCR_{1,s}(h) = 3 \cdot E_{1,s} \cdot (1 + h) \cdot \sigma_{1,s}.$$

Alokację Eulera wyznaczamy zgodnie ze wzorem:

$$SCR(L_{1,s}|L) = \frac{d}{dh} SCR(h)|_{h=0}.$$

Ostatecznie dostajemy:

$$\begin{aligned} SCR(L_{1,s}|L) &= \frac{SCR_1 + SCR_2 \cdot rho_{1,2}}{SCR} \cdot \frac{(SCR_{1,s})^2 + SCR_{1,s} \cdot SCR_{1,r} rho_{r,s}}{SCR_1} \\ &= \frac{12.6 + 16.11 \cdot 0.25}{22.79} \cdot \frac{(3 \cdot 30 \cdot 0.1)^2 + (3 \cdot 30 \cdot 0.1) \cdot (3 \cdot 20 \cdot 0.09) \cdot 0.5}{12.60} \\ &= 6.09, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy $SCR_1 = SCR_1(0)$.

Przykładowa literatura: Rozdział 8.5 w “*Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*”, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrecht, Princeton, 2015.

Zadanie 5.

Aktuariusz monitoruje jakość swoich prognoz Value-at-Risk w ramach modelu kapitału ekonomicznego dla ryzyka finansowego. W oparciu o dzienne dane historyczne cen akcji, przeprowadził back-testing prognoz. Dla kolejnych momentów czasu, poczynając od 1 lutego 2024, z krokiem dziennym, oszacował 100 wartości Value-at-Risk straty jednodniowej na poziomie istotności 0.99 i porównał swoje prognozy z rzeczywistymi zaobserwowanymi stratami. Aktuariusz odnotował przekroczenia prognozy Value-at-Risk w kolejnych dniach o numerach 7, 9, 10, 26, 77, 89, 90, 91.

- a) Wyjaśnij jak często spodziewasz się przekroczeń prognozy Value-at-Risk i intuicyjnie oceń jakość prognoz, gdy zakładamy, że straty w kolejnych okresach są niezależne o takim samym rozkładzie (2p).
- b) Załóżmy, że liczba przekroczeń prognozy Value-at-Risk tworzy ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie Bernoulliego:
 - Ile wynosi wartość prawdopodobieństwa sukcesu w tym rozkładzie? (1p).
 - Zaproponuj test, który zweryfikowałby jakość prognoz w oparciu o rozkład odstępów czasu pomiędzy przekroczeniami prognozy Value-at-Risk (2p).

Odpowiedzi:

- a) Spodziewamy się jednego przekroczenia poziomu wyznaczonego przez prognozę VaR w ciągu 100 dni. Miara ryzyka VaR została niedoszacowana.
- b) Wykorzystując klasyczne własności ciągu Bernoulliego i interpretację miary VaR możemy wnioskować:
 - Prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie wynosi 0.01.
 - Możemy wykorzystać dowolny test dopasowania rozkładu, gdzie weryfikujemy hipotezę, że odstępów czasu (mierzone w dniach) pomiędzy przekroczeniami VaR pochodzą z niezależnych rozkładów geometrycznych (liczba porażek do pierwszego sukcesu).

Przykładowa literatura: Rozdział 2.3 w *“Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools”*, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrecht, Princeton, 2015.

Zadanie 6.

Rozważamy uproszczony model wewnętrzny w reżimie Wyplacalność II, w którym rozważamy wyłącznie ryzyko rezerw pochodzące z jednego roku szkodowego. Stosujemy model Incremental Loss Ratio, w którym skumulowane wypłaty $(C_i, i = 0, \dots, n)$, w przyszłych latach kalendarzowych i , opisane są wzorem: $C_0 = 100, C_i = C_{i-1} + X_i$, gdzie $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ są niezależne oraz

Rok kalendarzowy i	μ_i	σ_i
1	200	50
2	100	30
3	30	10

Podane oszacowania (μ_i, σ_i^2) są oszacowaniami *best estimate* dla rozkładów szkód i nie zmieniają się w kolejnych latach kalendarzowych. Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 0%.

- Zapisz stratę jednoroczną i ostateczną, na które jesteśmy narażeni w ramach modułu ryzyka rezerw. Dokładnie wyjaśnij składowe strat (2p).
- Wyznacz wymóg kapitałowy dla ryzyka rezerw w powyższym modelu wewnętrznym w reżimie Wyplacalność II, wyjaśnij wybór straty i miary ryzyka (2p).
- W ogólności, analizujemy odchylenie standardowe straty jednorocznej do odchylenia straty ostatecznej w ryzyku rezerw. Wyjaśnij, czy dla linii biznesowej z długim okresem (losowego) rozwoju szkód spodziewasz się mniejszego, czy większego współczynnika? (1p).

Odpowiedzi:

- a) Stratę w horyzoncie jednorocznym definiujemy jako:

$$L_{1YR} = E[C_n | C_1, C_0] - E[C_n | C_0] = X_1 - E[X_1] \sim N(0, 50^2).$$

Stratę w horyzoncie ostatecznym definiujemy jako:

$$\begin{aligned} L_{ULT} &= E[C_n | C_n, C_{n-1}, \dots, C_1, C_0] - E[C_n | C_0] \\ &= C_n - E[C_n | C_0] \\ &= X_1 + X_2 + X_3 - E[X_1 + X_2 + X_3] \sim N(0, 50^2 + 30^2 + 10^2). \end{aligned}$$

- Wyznaczamy wymóg kapitałowy stosując miarę $VaR_{0,995}(L_{1YR}) = 2.57 * 50 = 128.50$.
- Spodziewamy się niższego współczynnika, ponieważ strata ostateczna ma większą zmienność w sytuacji, gdy narażeni jesteśmy na losowy rozwój szkód z dłuższym ogonem rozwoju.

Przykładowa literatura: “*Claims run-off uncertainty: the full picture*” - M. Merz, M.V. Wüthrich, 2015; oraz Rozdział 3.5.6 w “*Actuarial Aspects of ERM for Insurance Companies*”, 2016.

Zadanie 7.

Firma ubezpieczeniowa przygotowuje bilans w reżimie Wyłączalność II na koniec 2024r. Wyznaczyła:

- wielkość środków własnych (nadwyżka aktywów nad wartość zobowiązań) równą 100,
- wartość najlepszego oszacowania zobowiązań (*best estimate*) równą 200,
- kapitałowe wymogi wypłacalności na kolejne trzy lata na poziomie 100, 50, 20 (zakładamy, że wymogi wyznaczone są na początku danego roku kalendarzowego).

Na rynku finansowym obserwujemy płaską strukturę terminową i stopa wolna od ryzyka wynosi 2% na koniec 2024. Wartość najlepszego oszacowania przepływu pieniężnego w roku 2025, które jest uwzględnione w najlepszym oszacowaniu zobowiązania na koniec 2024, wynosi 100 (zakładamy, że przepływ następuje na końcu roku, przed wyceną zobowiązania na koniec 2025). Na koniec roku 2025 okazało się, że przepływ pieniężny w roku 2025 wyniósł 125, zamiast oczekiwanych 100, i aktuariusz postanowił zmienić założenia wyceny, co skutkowało zwiększeniem najlepszego oszacowania zobowiązań i kolejnych kapitałowych wymogów wypłacalności o 20% w porównaniu z oszacowaniem, które zostałyby policzone na koniec 2025 przy parametrach ustalonych na koniec 2024. Struktura terminowa stóp procentowanych nie zmieniła się.

- a) Wyznacz wartość najlepszego oszacowania zobowiązań na koniec 2025 (1p).
- b) Wyznacz margines ryzyka na koniec 2025 (1p).
- c) Wyznacz wielkość środków własnych na koniec 2025, przyjmując założenie, że aktywa lokowane są w instrumenty wolne od ryzyka (2p).
- d) Wyznacz *reverse stress* dla przepływu pieniężnego w 2025 r., przy którym wartość środków własnych spadnie do poziomu 80 (1p).

Odpowiedź:

- a) Wartość najlepszego oszacowania spełnia zależność:

$$V_0 = \frac{E(C_1) + V_1}{1 + r_f}.$$

Wartość najlepszego oszacowania na koniec 2025 przed zmianą założeń wyceny wynosi $V_1 = 200 \cdot (1 + 2\%) - 100 = 104$. Po zmianie założeń wyceny, wynosi $104 \cdot 1.2 = 124.80$.

- b) Margines ryzyka na koniec 2025 przez zmianą założeń wyceny wynosi:

$$RM = CoC \cdot \sum_{i=1}^n \frac{SCR(i)}{(1+r_f)^i} = 6\% \cdot \left(\frac{50}{1+2\%} + \frac{20}{(1+2\%)^2} \right) = 2.94$$

Po zmianie założeń wyceny, wynosi $2.94 \cdot 1.2 = 3.52$.

c) Zmiana środków własnych w 2025 jest wynikiem następujących zmian:

- Strata związana z realizacją przepływu z tytułu ubezpieczenia vs oczekiwany przepływ wynosi $125-100=25$.
- Strata związana ze zmianą założeń wyceny wynosi $(104+2.94) \cdot 0.2 = 21.38$.
- Stopa zwrotu na środkach własnych wynosi $100 \cdot 2\% = 2$.
- Uwolnienie marginesu ryzyka wynosi $100 \cdot 6\% = 6$.

Wartość środków własnych na koniec roku 2025 wynosi $100-25-21.38+6+2=61.61$.

d) W oparciu o analizę w p. c), szukamy x , który spełnia równanie:

$$100 - x - 21.38 + 6 + 2 = 80$$

Dostajemy $x = 6.61$. W scenariuszu rozważanym powyżej, uzyskamy środki własne na poziomie 80 jeżeli zrealizowana wartość przepływu będzie wyższa od oczekiwanej wartości o 6.61.

Przykładowa literatura: Art. 75-79 i 88 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wyłącalność II); oraz art.37 w *DYREKTYWA PARLAMENTU EUROPEJSKIEGO I RADY 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej* (Wyłącalność II).

Zadanie 8.

Rozważamy dwie linie biznesowe, w których wyznaczono jednoroczne oczekiwane zyski per ekspozycja na poziomie 30 i 50 oraz jednoroczne wymogi kapitałowe per ekspozycja na poziomie 100 i 175. Wymogi kapitałowe oraz oczekiwane zyski zależą liniowo od ekspozycji. Współczynnik korelacji Pearsona pomiędzy jednorocznymi stratami w liniach wynosi 0.25. Wymogi kapitałowe dla linii i spółki wyznaczamy jako trzykrotności odchylenia standardowego jednorocznej straty. Ekspozycje w obu liniach wynoszą 100 jednostek.

- Wyznacz miary RORAC dla linii biznesowych przy alokacji Eulera (2p).
- Uzasadnij, w której linii należy zwiększyć ekspozycję, aby zmaksymalizować RORAC dla spółki (1p).
- Wyjaśnij, co oznacza, z biznesowego i matematycznego punktu widzenia, własność zgodności alokacji Eulera z miarą RORAC (*RORAC compatibility*), i czy własność ta zachodzi także dla innych metod alokacji (2p).

Odpowiedzi:

- Wyznaczamy zdywersyfikowany kapitał:

$$RC(L_1 + L_2) = \sqrt{(100)^2 + (175)^2 + 2 * 100 * 175 * 0.25} = 222.21.$$

Zgodnie z alokacją Eulera, wyznaczamy alokacje kapitału do linii pierwszej i drugiej:

$$EC(L_1|L) = \frac{100^2 + 100 \cdot 175 \cdot 0.25}{222.21} = 64.69,$$

$$EC(L_2|L) = \frac{175^2 + 100 \cdot 175 \cdot 0.25}{222.21} = 157.52.$$

Wyznaczamy miary RORAC:

$$RORAC_{linia I} = \frac{30}{64.69} = 0.46,$$

$$RORAC_{linia II} = \frac{50}{157.52} = 0.31,$$

- Ponieważ $RORAC_{linia I} > RORAC_{linia II}$, należy zwiększyć ekspozycję w linii pierwszej.
- Zgodność alokacji Eulera z miarą RORAC oznacza, że zwiększenie ekspozycji (o małą wielkość) w linii o najwyższym RORAC zwiększy RORAC na poziomie portfela. W konsekwencji, możemy podejmować decyzje inwestycyjne w oparciu o miary RORAC. Alokacja Eulera jest jedyną alokacją spełniającą ten warunek.

Przykładowa literatura: Rozdział 8.5 w *“Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools”*, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrecht, Princeton, 2015.

Zadanie 9.

Firma ubezpieczeniowa posiada zobowiązanie w wysokości 100 i 200 w terminach zapadalności równych 3 i 6 lat. Struktura terminowa stóp procentowych wyznaczona jest w oparciu o stopy w terminach zapadalności 5 i 10 lat w wysokości, odpowiednio, 5% i 7%. Stopy w pozostałych terminach zapadalności, pomiędzy 5 i 10 lat, definiowane są poprzez liniową aproksymację stóp z terminów zapadalności 5 i 10 lat. Struktura terminowa stóp w terminach zapadalności poniżej 5 lat i powyżej 10 lat jest natomiast płaska. Przyjmujemy, że stopy są stopami spot oprocentowania ciągłego. Zmiany stóp w terminach 5 i 10 lat w okresie tygodnia modelowane są przy pomocy łącznego rozkładu normalnego:

$$N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left(\frac{0.5}{100}\right)^2 & \frac{0.5}{100} * \frac{1}{100} * 0.5 \\ \frac{0.5}{100} * \frac{1}{100} * 0.5 & \left(\frac{1}{100}\right)^2 \end{bmatrix}\right).$$

Poniżej zaniedbujemy zmiany wartości zobowiązania związane ze skróceniem terminu zapadalności.

- Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu wyznacz zmianę wartości zobowiązania w wyniku spadku stóp procentowych w ciągu tygodnia w terminach 5 i 10 lat o 2 punkty procentowe (2p).
- Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu, wyznacz ryzyko zmiany wartości zobowiązania w horyzoncie jednego tygodnia związane ze zmianą wartości zobowiązania w wyniku zmian stóp procentowych. Jako miarę ryzyka zastosuj miarę Value-at-Risk na poziomie 99% (3p).

Odpowiedzi:

- Stopę dla terminu zapadalności $t=3$ wyznaczamy jako:

$$r_3 = r_5,$$

stopę dla terminu zapadalności $t=6$ wyznaczamy jako:

$$r_6 = \frac{4}{5} \cdot r_5 + \frac{1}{5} \cdot r_{10},$$

gdzie r_5 i r_{10} oznaczają stopy w terminach 5 i 10 lat.

Wartość zobowiązania dana jest wzorem:

$$\begin{aligned} P(r_5, r_{10}) &= 100 \cdot e^{-3 \cdot r_3} + 200 \cdot e^{-6 \cdot r_6} = 100 \cdot e^{-3 \cdot r_5} + 200 \cdot e^{-6 \cdot \left(\frac{4}{5} r_5 + \frac{1}{5} r_{10}\right)} \\ &= A(r_5) + B(r_5, r_{10}). \end{aligned}$$

Wyznaczamy pochodne na potrzeby aproksymacji Taylora:

$$A_{r_5}(r_5) = -3 \cdot 100 \cdot e^{-3 \cdot r_5},$$

$$B_{r_5}(r_5, r_{10}) = -\frac{6 \cdot 4}{5} \cdot 200 \cdot e^{-6 \cdot r_6},$$

$$B_{r_{10}}(r_5, r_{10}) = -\frac{6}{5} \cdot 200 \cdot e^{-6 \cdot r_6}.$$

Stosując aproksymację Taylora pierwszego rzędu i podstawiając $h_5 = -\frac{2}{100} h_{10} = -\frac{2}{100}$, dostajemy:

$$\begin{aligned} P(r_5 + h_5, r_{10} + h_{10}) - P(r_5, r_{10}) &= P_{r_5}(r_5, r_{10}) \cdot h_5 + P_{r_{10}}(r_5, r_{10}) \cdot h_{10} \\ &= (A_{r_5}(r_5, r_{10}) + B_{r_5}(r_5, r_{10})) \cdot h_5 + B_{r_{10}}(r_5, r_{10}) \cdot h_{10} \\ &= -952.53 \cdot h_5 - 173.58 \cdot h_{10} = 22.52. \end{aligned}$$

- b) W oparciu o analizy w p. a) i przyjmując założenie o łącznym rozkładzie normalnym dla tygodniowej zmiany stóp procentowych (h_5, h_{10}) , dostajemy rozkład:

$$P(r_5 + h_5, r_{10} + h_{10}) - P(r_5, r_{10}) \sim N(0, \sigma^2),$$

$$\text{gdzie } \sigma^2 = 952.53^2 \cdot \left(\frac{0.5}{100}\right)^2 + 173.58^2 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 2 \cdot 952.53 \cdot \frac{0.5}{100} \cdot 173.58 \cdot \frac{1}{100} \cdot 0.5 = 5.82^2.$$

Wyznaczamy miarę ryzyka zgodnie ze wzorem:

$$VaR_{0.99}(X) = 2.33 \cdot 5.82 = 13.55.$$

Przykładowa literatura: Rozdział 20.3 w “*Actuarial Finance – Derivatives, Quantitative Models and Risk Management*” - M. Boudreault, J.F. Renaud, Wiley, 2019.

Zadanie 10.

Rozważamy stratę L z rozkładu Pareto $Pa(c, 1)$, $c > 1$, postaci:

$$F(x) = 1 - (1 + x)^{-c}, \quad x \geq 0.$$

Znamy miary ryzyka Value-at-Risk i Expected Shortfall dla rozkładu Pareto:

$$VaR_\alpha(L) = (1 - \alpha)^{\frac{1}{c}} - 1, \quad ES_\alpha(L) = \frac{c}{c-1} (1 - \alpha)^{\frac{1}{c}} - 1.$$

a) Wyznacz (1p)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)}.$$

- b) Dla ustalonego $\beta \in (0,1)$, znajdź $\alpha \in (0,1)$, przy którym zachodzi $VaR_\beta(L) = ES_\alpha(L)$ (1p).
- c) Czy równanie z p. b) ma zawsze rozwiązanie? (1p).
- d) Aktuariusz na potrzeby wewnętrznej oceny ryzyka dokonuje wyboru miary ryzyka traktując miarę ryzyka z reżimu Wypłacalność II jako benchmark. Uzasadnij, jak należy interpretować wyniki w punktach a) i c) w kontekście wyboru miary ryzyka Value-at-Risk vs Expected Shortfall w modelach kapitału ekonomicznego i kwantyfikacji ekstremalnie dużej straty w przypadku strat z rozkładu typu Pareto z bardzo niskim i bardzo wysokim parametrem c (2p).

Odpowiedź:

a) Podstawiając miary ryzyka i stosując regułę de l'Hospitala dostajemy:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{ES_\alpha(L)}{VaR_\alpha(L)} = \frac{c}{c-1}.$$

b) Rozwiązując równanie postaci:

$$(1 - \beta)^{-\frac{1}{c}} - 1 = \frac{c}{c-1} (1 - \alpha)^{-\frac{1}{c}} - 1,$$

dostajemy:

$$\alpha = 1 - (1 - \beta) \left(\frac{c-1}{c} \right)^{-c}.$$

Potrzebujemy $\alpha \in (0,1)$. Można zauważyć, że dla dostatecznie niskich $c > 1$ dostaniemy $\alpha < 0$ dla każdego $\beta \in (0,1)$.

c) Przy niskich wartościach parametru c , ogon w rozkładzie Pareto jest ciężki, miary VaR i ES przy wysokich poziomach ufności zwracają istotnie różne wyniki i miara

VaR potencjalnie nie opisuje poprawnie ryzyka w ogonie. Należy rozważyć wybór ES jako miary ryzyka. Przy dużych wartościach parametru c , ogon w rozkładzie Pareto jest lżejszy, miary VaR i ES przy wysokich poziomach ufności zwracają podobne wyniki i obie miary VaR i ES opisują poprawnie ryzyko w ogonie.

Przykładowa literatura: Rozdział 2.3 w “*Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*”, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrecht, Princeton, 2015.

Sesja egzaminacyjna w dniu 7 października 2025 r.**Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń****Arkusz ocen**

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	