

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XCIV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 6 października 2025r.

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i
majątkowych**

Nr rejestracyjny:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Dla pewnego ryzyka wartość pojedynczej szkody ma rozkład określony na zbiorze liczb naturalnych (bez zera), a łączna wartość szkód X ma złożony rozkład Poissona. Składka netto za nadwyżkę łącznej szkody X ponad k dla wybranych wartości k wynosi:

k	3	4	6	7
$E[(X - k)_+]$	0.244	0.172	0.111	0.089

Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość szkód X wyniesie 4, 5 lub 6 wynosi:

- (A) 0.216
- (B) 0.155
- (C) 0.050
- (D) 0.033
- (E) brakuje danych do udzielenia jednoznacznej odpowiedzi

Zadanie 2.

Łączna wartość szkód S wyraża się wzorem:

$$S = X_1 + \dots + X_N$$

gdzie wartości poszczególnych szkód (X_i to wartość i -tej szkody) są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem oraz od zmiennej N (liczby szkód). Każda ze zmiennych X_i ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2, zaś N ma rozkład geometryczny określony na liczbach naturalnych z zerem i z ilorazem postępu 0.5.

$\Pr(S \leq 4 \ln 2)$ wynosi:

- (A) 0.9
- (B) 0.75
- (C) 0.6
- (D) 0.45
- (E) 0.3

Wskazówka: Zauważ, że funkcja tworząca momenty zmiennej losowej S jest postaci:

$$p + (1 - p) \cdot \frac{a}{a - t}$$

Zadanie 3.

Pewne ryzyko generuje szkody zgodnie z procesem Poissona z parametrem intensywności θ . O parametrze θ zakładamy, że jest on realizacją zmiennej losowej Θ o rozkładzie Gamma $(2, 1)$. Niech $N(t)$ oznacza liczbę szkód w czasie od 0 do t , zaś $T(t)$ - chwilę wystąpienia pierwszej szkody po momencie t .

$E(T(3) - 3 | N(3) = 3)$ wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{4}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) $\frac{2}{3}$

Zadanie 4.

Niech $X_{t,j}$ oznacza wartość szkód zaszłych w roku t i zlikwidowanych w roku $(t + j)$, zaś $CX_{t,j} = \sum_{i=0}^j X_{t,i}$ odpowiednie wartości skumulowane. Zakładamy, iż likwidacja szkód zamyka się w okresie J lat, a więc iż dla $j > J$ wszystkie $X_{t,j}$ równają się zeru. Założenia o momentach pierwszych dwóch rzędów są następujące:

- $E(X_{t,j} | \mu_t) = r_j \mu_t$,
 - gdzie współczynniki rozkładu opóźnienia r_j są nieujemne i $\sum_{j=0}^J r_j = 1$
- $cov(X_{t,j}, X_{s,i} | \mu_t, \mu_s) = \begin{cases} r_j \sigma_t^2 & \text{jeśli } t = s \text{ oraz } i = j \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$
- $E(\mu_t) = \mu$
- $E(\sigma_t^2) = \sigma^2$
- $cov(\mu_t, \mu_s) = \begin{cases} a & \text{jeśli } t = s \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Znamy wartości parametrów:

- $(r_0, r_1, r_2) = \left(\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right)$,
- $\mu = 1000$,
- $\sigma^2 = 10000$,
- $a = 10000$.

Kalkulację rezerwy na koniec 2024 roku na szkody zaistniałe w 2022 roku i do tej pory niezlikwidowane przeprowadzamy w oparciu o predyktor liniowy postaci:

$$Pred(CX_{2022,J} - CX_{2022,2} | CX_{2022,2}) = b_0 + b_1 CX_{2022,2}$$

Minimalizując błąd średniokwadratowy predyktora otrzymujemy wartości parametrów (b_0, b_1) . Wartość parametru b_1 wynosi:

- (A) 1/2
- (B) 2/5
- (C) 1/3
- (D) 1/4
- (E) 1/5

Zadanie 5.

W pewnym ubezpieczeniu mamy do czynienia z ciągłym, stopniowym wzrostem liczby ryzyk w portfelu, co wyraża założenie, iż zmienna T oznaczająca moment zajścia losowo wybranej szkody z tego portfela w ciągu roku (o ile oczywiście do szkody dojdzie) ma rozkład dany na odcinku $(0, 1)$ gęstością:

- $f_T(t) = 0.9 + 0.2t$

Niech D oznacza odstęp w czasie od momentu zajścia szkody do jej likwidacji. Zmienna ta ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną równą 1 (rok).

Zakładamy że zmienne losowe T oraz D są niezależne. Prawdopodobieństwo, iż szkoda, do której doszło w ciągu roku, pozostanie nie-zlikwidowana na koniec tego roku, z przybliżeniem do jednego punktu procentowego wynosi:

- (A) 68%
- (B) 64%
- (C) 60%
- (D) 55%
- (E) 50%

Zadanie 6.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela opisany jest przez klasyczny model:

$$U(t) = u + ct - S_{N(t)},$$

gdzie u jest nadwyżką początkową,

ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu t ,

$N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ jest sumą wypłat, gdzie pojedyncze wypłaty:

X_i są zmiennymi losowymi niezależnymi nawzajem i od procesu $N(t)$, o identycznym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną μ .

Prawdopodobieństwo ruiny oznaczmy przez Ψ :

$$\Psi = \Pr(\exists t \in (0, \infty), U(t) < 0)$$

Rozważmy prawdopodobieństwa ruiny dla trzech następujących zestawów parametrów procesu:

Ψ_1 dla procesu o parametrach: $u_1 = 20, c_1 = 20, \mu_1 = 1, \lambda_1 = 18$

Ψ_2 dla procesu o parametrach: $u_1 = 40, c_1 = 40, \mu_1 = 2, \lambda_1 = 18$

Ψ_3 dla procesu o parametrach: $u_1 = 40, c_1 = 40, \mu_1 = 1, \lambda_1 = 36$

Które z poniższych stwierdzeń jest prawdziwe?

(A) $\Psi_1 = \Psi_2 > \Psi_3$

(B) $\Psi_1 > \Psi_2 > \Psi_3$

(C) $\Psi_1 = \Psi_2 < \Psi_3$

(D) $\Psi_1 < \Psi_2 = \Psi_3$

(E) $\Psi_3 = \Psi_1$

Zadanie 7.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki ubezpieczyciela, a więc proces:

$$U(t) = u + (1 + \theta)\lambda\mu_Y t - S_{N(t)}, \text{ gdzie:}$$

- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ ,
- $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ (lub zero, jeśli $n = 0$)
- Y_1, Y_2, Y_3, \dots to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie danym na półosi dodatniej gęstością: $f_Y(y) = \frac{\alpha v^\alpha}{(v+y)^{\alpha+1}}$.

Wiemy, że parametry procesu wynoszą:

- $\alpha = 2$, $v = 2$ oraz $\theta = \frac{1}{5}$.

Prawdopodobieństwo ruiny $\Psi(u)$, a więc zdarzenia:

- $\exists T > 0$ takie, że $U(T) < 0$

jest funkcją nadwyżki początkowej u . Wiadomo, że dla odpowiednio dobranych parametrów a, b, c funkcja ta spełnia zależność:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Psi(u)(1 + au)^b = c$$

Wartości parametrów (a, b, c) wynoszą:

(A) $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, 2, 5\right)$

(B) $(a, b, c) = (1, 2, 5)$

(C) $(a, b, c) = (2, 2, 5)$

(D) $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, 1, 5\right)$

(E) $(a, b, c) = (2, 1, 5)$

Zadanie 8

Poniżej w tabelach przedstawiono trzy alternatywne scenariusze dotyczące dużej populacji kierowców ubezpieczonych w zakresie Auto Casco u dużego ubezpieczyciela przez dwa lata: 2022 i 2023. W roku 2022 wszyscy mieli wykupione ubezpieczenie pełne. W roku 2023 tym samym kierowcom zaoferowano wybór pomiędzy polisą taką jak w roku poprzednim oraz polisą tańszą, gwarantującą jedynie pokrycie 80% wartości każdej ewentualnej szkody. Populacja kierowców podzieliła się na dwie grupy:

- Grupę 1 tych, którzy wykupili ubezpieczenie pełne, tak jak w roku 2022
- Grupę 2 tych, którzy wykupili polisę z pokryciem 80%.

Poniżej zaprezentowane są trzy możliwe rezultaty wprowadzenia przez ubezpieczyciela możliwości wyboru, obserwowane przez pryzmat częstości szkód wg grupy i roku obserwacji. Oczywiście w ciągu roku 2022 ubezpieczyciel nie wiedział, kto należy do grupy 1, a kto do grupy 2. Kto do której grupy należy okazało się w roku 2023, i po jego zakończeniu można było nie tylko zaobserwować częstość szkód w podziale na grupy w tym roku, ale także w roku 2022.

Scenariusz I	2022	2023
Grupa 1	0,20	0,18
Grupa 2	0,20	0,18

Scenariusz II	2022	2023
Grupa 1	0,20	0,20
Grupa 2	0,20	0,16

Scenariusz III	2022	2023
Grupa 1	0,23	0,23
Grupa 2	0,17	0,17

Który ze scenariuszy stanowi ilustrację zjawiska pokusy nadużycia (*moral hazard*), który negatywnej selekcji (*adverse selection*), który zaś nie ilustruje żadnego z tych zjawisk?

- (A) Scenariusz I – negatywna selekcja, scenariusz II – pokusa nadużycia, Scenariusz III - żadne
- (B) Scenariusz I – pokusa nadużycia, scenariusz II – negatywna selekcja, Scenariusz III - żadne
- (C) Scenariusz I – negatywna selekcja, scenariusz II – żadne, scenariusz III – pokusa nadużycia
- (D) Scenariusz I – żadne, scenariusz II – pokusa nadużycia, scenariusz III – negatywna selekcja
- (E) Scenariusz I – pokusa nadużycia, scenariusz II – żadne, scenariusz III – negatywna selekcja

Zadanie 9.

Niech:

- Y będzie zmienną losową o rozkładzie Gamma $(\alpha, 1)$, z wartością oczekiwaną równą wariancji, równą α ;
- R będzie liczbą z przedziału $(0,1)$.

Wtedy:

$$\inf_{d>0} E\{\exp[R(Y-d)]|Y>d\}$$

wynosi:

(A) $\left(\frac{1}{1-R}\right)^\alpha$ dla dowolnych $\alpha > 0$

(B) $\frac{1}{1-R}$ dla dowolnych $\alpha > 0$

(C) jeden dla dowolnych $\alpha > 0$

(D) $\left(\frac{1}{1-R}\right)^\alpha$ dla $\alpha > 1$, zaś $\frac{1}{1-R}$ dla $\alpha \in (0,1)$

(E) $\frac{1}{1-R}$ dla $\alpha > 1$, zaś $\left(\frac{1}{1-R}\right)^\alpha$ dla $\alpha \in (0,1)$

Zadanie 10.

W pewnym ubezpieczeniu szkody zawsze likwidowane są nie później, niż w roku następującym po roku zajścia. Niech $X_{t,0}$ oraz $X_{t,1}$ oznaczają łączną wartość szkód zaistniałych w roku t , a likwidowanych w tym samym roku oraz w roku następnym, odpowiednio. Mamy w dyspozycji próbkę obserwacji z lat $t = 1, 2, \dots, n$:

- $X_{1,0}, X_{1,1}, X_{2,0}, X_{2,1}, \dots, X_{n,0}, X_{n,1}$

Zakładamy, że wszystkie powyższe zmienne są niezależne, i mają rozkłady Gamma o parametrach:

- $X_{t,0} \sim \Gamma(\alpha_0, \beta) \quad t = 1, 2, \dots, n,$
- $X_{t,1} \sim \Gamma(\alpha_1, \beta) \quad t = 1, 2, \dots, n.$

Nie znamy wartości parametrów $(\alpha_0, \alpha_1, \beta)$, w istocie jednak interesuje nas jedynie

parametr $f_1 := \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0}$

Rozważamy estymator tego parametru postaci:

- $\hat{f}_1 = \frac{\sum_{t=1}^n (X_{t,0} + X_{t,1})}{\sum_{t=1}^n X_{t,0}}$

Stosunek kwadratu obciążenia do wariancji tego estymatora:

- $\frac{E[(\hat{f}_1 - f_1)^2]}{\text{var}(\hat{f}_1)}$

wynosi:

(A) $\frac{\alpha_1(\alpha_0 - \frac{1}{n})}{\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{2}{n}}$

(B) $\frac{1}{n} \frac{\alpha_1(\alpha_0 - \frac{1}{n})}{\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{2}{n}}$

(C) $\frac{1}{n} \frac{\alpha_1(\alpha_0 - \frac{1}{n})}{\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{1}{n}}$

(D) $\frac{\alpha_1(\alpha_0 - \frac{2}{n})}{\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{1}{n}}$

(E) $\frac{1}{n} \frac{\alpha_1(\alpha_0 - \frac{2}{n})}{\alpha_0 + \alpha_1 - \frac{1}{n}}$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 6 października 2025r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Nr rejestracyjny:KLUCZ ODPOWIEDZI.....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	C	
2	B	
3	A	
4	C	
5	B	
6	A	
7	D	
8	D	
9	E	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna