

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**XCIV Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 6 października 2025 r.**

**Matematyka finansowa**

**Numer rejestracyjny: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , filtrację  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  oraz proces Wienera  $W_t$ . Niech  $0 < s < t < u$ . Wówczas

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(W_s W_t W_u)$$

wynosi:

- (A) 0
- (B)  $u - t$
- (C)  $u - s$
- (D)  $(u - t)(t - s)$
- (E)  $(u - t)(t - s)s$

**Zadanie 2.**

Niech  $a > 0$  oraz  $X_t^{\sin} := \sin(aW_t)$  oraz  $X_t^{\cos} := \cos(aW_t)$ , gdzie  $W_t$  jest procesem Wienera. Niech  $Y_t := X_t^{\sin} - X_t^{\cos}$ , oraz  $Z_t := X_t^{\sin} + X_t^{\cos}$ .

Wówczas:

(A)  $dY_t = aZ_t dW_t - \frac{a^2}{2} Y_t dt$

(B)  $dY_t = -aY_t dW_t - \frac{a^2}{2} Y_t dt$

(C)  $dY_t = -aZ_t dW_t + \frac{a^2}{2} Y_t dt$

(D)  $dY_t = aY_t dW_t + \frac{a^2}{2} Z_t dt$

(E)  $dY_t = -aY_t dW_t + \frac{a^2}{2} Z_t dt$

**Zadanie 3.**

Rozważmy model Vasicka

$$dr_t = a(r - r_t)dt + \sigma dW_t.$$

Wiemy, iż  $a = 0.2$ ,  $r = 4\%$ ,  $\sigma = 0.1$ .

Analityk budujący scenariusze stochastyczne symuluje trajektorię procesu, zakładając, iż w roku występuje 250 dni handlowych. Wiemy, iż dla pewnego dnia  $T$  analityk otrzymał  $r_T = 1.3\%$ . Proszę wyznaczyć prawdopodobieństwo, iż dla kolejnego dnia handlowego symulowana wartość procesu będzie ujemna (proszę podać najbliższą odpowiedź).

- (A) 0.5%
- (B) 1.0%
- (C) 1.5%
- (D) 2.0%
- (E) 2.5%

**Zadanie 4.**

Pożyczkobiorca wziął kredyt o stałym, rocznym oprocentowaniu nominalnym 6% na okres 10 lat. Raty kredytu płacone są na koniec każdego miesiąca i wynoszą 1110.21.

W trakcie trwania kredytu pożyczkobiorca popadł w kłopoty finansowe i nie opłacił rat o numerach 50, 51 oraz 52. Począwszy od 53. raty inwestor wznowił opłacanie rat w stałej wysokości 1110.21. Całość zaległości wynikających z nieuiszczenia rat o numerach 50, 51 oraz 52 zostanie opłacona wraz z ostatnią ratą kredytu.

Proszę określić kwotę całkowitego pozostałego zadłużenia bezpośrednio po opłaceniu raty o numerze 100 (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) 24 533
- (B) 24 733
- (C) 24 933
- (D) 25 133
- (E) 25 333

**Zadanie 5.**

Rozważmy opcję *forward start*, która za rok da jej posiadaczowi prawo do 1-roczej Europejskiej opcji kupna na akcję A o cenie wykonania równej 105% ceny akcji A za rok.

Proszę wycenić opcję *forward start* w chwili  $t = 0$  wiedząc, iż:

- akcja A nie płaci dywidendy,
- zmienność ceny akcji A wynosi 0.15,
- cena forward akcji A za rok, wynosi  $F_{0,1} = 100$ ,
- stopa wolna od ryzyka wynosi 5%.

Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 5.14
- (B) 5.34
- (C) 5.54
- (D) 5.74
- (E) 5.94

**Zadanie 6.**

Rozważamy opcje barierowe typu *up-and out*, które dezaktywują się w przypadku, gdy cena instrumentu bazowego przekroczy zadaną barierę w okresie do swojej zapadalności.

W poniższej tabeli przedstawione zostały ceny rocznych Europejskich opcji kupna typu *up-and-out* o cenie wykonania 50 dla różnych poziomów bariery  $B$ :

$B$	Cena
50	0
60	0.145
70	0.831
80	1.727
Brak bariery	3.921

Wiemy, iż  $S_0 = 40$ . Niech  $M_T = \max_{t \leq T} S_t$ . Rozważmy Europejską opcję kupna  $\mathcal{O}$  o terminie zapadalności za rok, cenie wykonania 50 oraz wypłacie uzależnionej od faktu przekroczenia przez cenę instrumentu bazowego pewnych poziomów bariery w okresie jej trwania:

- jeśli  $M_1 < 60$  to wypłata wyniesie 0,
- jeśli  $M_1 \in [60,70)$  to wypłata wyniesie  $2 \max(S_1 - 50, 0)$ ,
- jeśli  $M_1 \geq 70$  to wypłata wyniesie  $\max(S_1 - 50, 0)$ .

Proszę wyznaczyć cenę opcji  $\mathcal{O}$  (proszę podać najbliższą wartość).

- (A) 1.363
- (B) 2.404
- (C) 4.462
- (D) 4.607
- (E) 5.358

**Zadanie 7.**

Intensywność oprocentowania zadana jest funkcją:

$$\delta_t = \frac{\frac{t^3}{100}}{4 + \frac{t^4}{200}}.$$

W chwili 0 deponowana jest kwota 100. Proszę określić w którym momencie wartość zgromadzonych na koncie środków osiągnie poziom 1000 (proszę wskazać najbliższą wartość):

- (A) 12.78
- (B) 14.78
- (C) 16.78
- (D) 18.78
- (E) 20.78

**Zadanie 8.**

Na rynku kwotowane są następujące wielkości:

- stopa depozytowa WIBOR 6M: 3.5%,
- kwotowania kontraktu FRA 6x12: 3.8%,
- kwotowania kontraktu FRA 12x18: 4.0%,
- kwotowania kontraktu FRA 18x24: 4.15%.

Jaka jest stopa swap dla dwuletniego kontraktu swap na stopę procentową z półrocznymi płatnościami opartymi na stopach WIBOR-6M przy założeniu kapitalizacji półrocznej (proszę wskazać najbliższą wartość)?:

- (A) 3.657%
- (B) 3.757%
- (C) 3.857%
- (D) 3.957%
- (E) 4.057%

**Zadanie 9.**

Cena akcji A wzrasta o 8% lub spada o 5% w każdym okresie. Obecna cena ( $t = 0$ ) akcji A wynosi 85 PLN, akcja za rok ( $t = 1$ ) wypłaci dywidendę 4 PLN.

Cena dwuletniej opcji europejskiej put *at-the-money* na akcję A, przy założeniu braku arbitrażu i przy rocznej stopie procentowej 3% wynosi (proszę wskazać najbliższą wartość):

- (A) 2.21 PLN
- (B) 2.31 PLN
- (C) 2.41 PLN
- (D) 2.51 PLN
- (E) 2.61 PLN

**Zadanie 10.**

Inwestor ma do zapłaty 100 PLN za rok, 90 PLN za dwa lata, 80 PLN za trzy lata oraz 90 PLN za cztery lata. Na rynku dostępne są następujące obligacje, każda o nominale 100 PLN:

Termin zapadalności	Roczny kupon	Cena w $t = 0$
1 rok	0%	95
2 lata	0%	92
3 lata	4.1%	103
4 lata	3.3%	101

Inwestor skonstruował portfel replikujący te zobowiązania. Koszt tego portfela w  $t = 0$  wynosi (proszę wskazać najbliższą wartość):

- (A) 325 PLN
- (B) 328 PLN
- (C) 331 PLN
- (D) 334 PLN
- (E) 337 PLN

**Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0,1)$** 

<b>z</b>	<b>0.00</b>	<b>0.01</b>	<b>0.02</b>	<b>0.03</b>	<b>0.04</b>	<b>0.05</b>	<b>0.06</b>	<b>0.07</b>	<b>0.08</b>	<b>0.09</b>
<b>0.0</b>	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
<b>0.1</b>	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
<b>0.2</b>	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
<b>0.3</b>	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
<b>0.4</b>	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
<b>0.5</b>	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
<b>0.6</b>	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
<b>0.7</b>	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
<b>0.8</b>	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
<b>0.9</b>	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
<b>1.0</b>	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
<b>1.1</b>	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
<b>1.2</b>	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
<b>1.3</b>	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
<b>1.4</b>	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
<b>1.5</b>	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
<b>1.6</b>	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
<b>1.7</b>	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
<b>1.8</b>	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
<b>1.9</b>	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
<b>2.0</b>	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
<b>2.1</b>	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
<b>2.2</b>	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
<b>2.3</b>	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
<b>2.4</b>	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
<b>2.5</b>	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
<b>2.6</b>	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
<b>2.7</b>	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
<b>2.8</b>	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
<b>2.9</b>	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
<b>3.0</b>	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
<b>3.1</b>	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
<b>3.2</b>	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
<b>3.3</b>	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
<b>3.4</b>	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
<b>3.5</b>	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
<b>3.6</b>	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
<b>3.7</b>	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
<b>3.8</b>	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
<b>3.9</b>	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 6 października 2025 r.**

**Matematyka finansowa**

**Arkusz odpowiedzi\***

Numer rejestracyjny: .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	A	
3	D	
4	E	
5	D	
6	C	
7	C	
8	C	
9	D	
10	C	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.